

基于随机投影思想的 MWC 亚奈奎斯特采样重构算法

盖建新^{1,2}, 付平², 孙继禹¹, 林海军¹, 吴丽华¹

(1. 哈尔滨理工大学测控技术与仪器黑龙江省高校重点实验室, 黑龙江哈尔滨 150080;

2. 哈尔滨工业大学自动化测试与控制系, 黑龙江哈尔滨 150001)

摘要: 针对现有调制宽带转换器 (Modulated Wideband Converter, MWC) 亚奈奎斯特采样重构算法性能不高问题, 提出了一种基于随机投影思想的重构算法. 该算法首先将 MWC 所获得的测量值矩阵通过随机投影方法压缩成具有较少向量的新的测量值矩阵, 然后利用所提出的求解器求解多测量向量问题, 通过检验和重复尝试性求解过程提高 MWC 的重构性能. 从理论和实验两个方面验证了所提出的算法的有效性. 实验结果表明, 与著名的 ReMBo 算法相比, 该算法有效提高了重构成功率; 当信号的频带数相同时, 精确重构所需的硬件通道数更小; 在相同的硬件通道数前提下, 可重构的信号频带数更高. 该算法与 ReMBo 相比运算时间并没有大幅度增加, 当信号频带数较大时, 不仅重构性能高, 而且运算时间比 ReMBo 小.

关键词: 调制宽带转换器; 亚奈奎斯特采样; 压缩感知; 随机投影

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)09-1686-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.09.004

A Recovery Algorithm of MWC Sub-Nyquist Sampling Based on Random Projection Method

GAI Jian-xin^{1,2}, FU Ping², SUN Ji-yu¹, LIN Hai-jun¹, WU Li-hua¹

(1. *The Higher Educational Key Laboratory for Measuring & Control Technology and Instrumentations of Heilongjiang Province, Harbin University of Science and Technology, Harbin, Heilongjiang 150080, China;*

2. *Department of Automatic Test and Control, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China*)

Abstract: The existing recovery algorithm of modulated wideband converter (MWC)-based sub-Nyquist sampling is far from satisfactory. Aiming at this problem, a recovery algorithm for MWC based on random projection method is proposed. This algorithm projects the measurement value matrix of MWC onto a random matrix with lower dimension to form a new measurement value matrix, and then solves a multiple measurement vector problem using a solver proposed. The recovery performance is enhanced through examining and repeating the tentative solving processes. This paper validates the effectiveness of the algorithm from both theoretical and experimental perspectives. Numerical experiments demonstrate that, compared with the popular ReMBo algorithm, the proposed algorithm significantly improves the success rate of recovery. From the same number of channels a signal with more spectral bands can be recovered by this algorithm, and a signal with the same number of bands can be recovered using fewer channels. Furthermore, the run time of this algorithm does not increase greatly. In contrast, compared with ReMBo, this algorithm can use a lower time cost to achieve a higher recovery performance when the spectral bands of the signal exceed a specific number.

Key words: modulated wideband converter; sub-Nyquist sampling; compressive sensing; random projection

1 引言

现代通信技术将窄带信息调制到了较宽的频谱范围内. 获取这些信息的传统方法是在已知载波频率的前提下通过解调来实现. 然而在一些应用领域中, 载波频

率是未知的或随时间变化的, 如在认知无线电^[1,2]、军事侦察^[3]等领域, 要求直接对信号进行采样来提取信息. 然而, 较宽的频谱给采样系统带来了双重压力, 即高采样率和较大的数据量, 前者使模数转换成为较大挑战, 后者对数据的存储和传输造成了巨大压力^[4].

新近提出的压缩感知 (Compressive Sensing, CS) 理论^[5-7]使得稀疏信号亚奈奎斯特采样成为可能. 根据 CS 理论, 如果测量矩阵满足 RIP 准则, 稀疏信号可以从比奈奎斯特率所要求的更少的线性测量值中精确地恢复. 基于 CS 理论, 学者们提出了一些亚奈奎斯特采样方法, 如随机解调^[8]、随机采样^[9]等, 但这些方法不能直接处理具有连续频谱的信号. 在文献^[10, 11]中, Mishali 结合傅里叶分析思想和 CS 理论, 针对具有连续频谱的稀疏宽带信号提出了称为调制宽带转换器 (Modulated Wideband Converter, MWC) 的亚奈奎斯特采样方法. 该方法可以采用现有的器件, 以低维的采样矩阵, 实现可精确重构的亚奈奎斯特采样, 有效缓解稀疏宽带信号在采样和存储方面的压力. MWC 所处理的频谱稀疏信号模型, 在通信、雷达、声纳和医疗成像等工程和科学应用领域具有重要的应用价值, 因此 MWC 的提出对这些领域产生了巨大的潜在影响^[12].

重构作为 MWC 亚奈奎斯特采样的核心技术, 目前在成功率、所需的最小通道数和所能重构的信号的最大频带数等方面存在着较大的改进空间. MWC 重构模型属于多测量向量 (Multiple Measurement Vectors, MMV) 问题^[10], 是 CS 理论的一个重要分支, 受到了国内外学者的高度关注^[13, 14]. MMV 重构算法大致可以分为贪婪算法^[15]和凸松弛算法^[13]两大类. 这些重构算法在平均重构性能方面都具有一定的确定性, 即给定重构算法的重构能力主要取决于具体 MMV 问题的可解性. 文献^[16]提出了一种性能可调的降维多测量向量与性能提升 (REduce MMV and BOost, ReMBo) 重构算法, 该算法将 MMV 问题随机地组合成单测量向量 (Single Measurement Vector, SMV) 问题进行求解, 通过多次尝试的方法来提升重构性能, 使得 ReMBo 算法的重构性能优于现有大多数重构算法. 尽管如此, 目前 ReMBo 算法在 MWC 重构方面的性能距离理论上限^[13]仍存在较大差距.

本文针对 ReMBo 算法存在的问题, 提出了一种维度可调的随机投影与性能提升 (Randomly Project MMV and Boost, RPMB) 算法框架. 该框架通过随机投影将原始 MMV 问题转化成新的 MMV 问题来求解, 然后检验并重复该过程, 直到获得满意解. 为了充分利用保留的多个测量向量间的联合稀疏性, 本文提出了一种适合于 RPMB 框架的求解器算法. 实验结果表明, 在相同条件下与 ReMBo 相比, RPMB 有效提高了 MWC 的重构成功率, 降低了高概率重构所需的最小通道数, 提高了能够重构的信号的最大频带数量.

2 MWC 亚奈奎斯特采样原理与重构问题描述

2.1 采样原理

MWC 是一种稀疏宽带信号亚奈奎斯特采样方法.

其采用扩频技术, 故意将各个子频带混叠在基带范围内, 使得低速率采样中包含原始信号中的完整信息. 如图 1 所示, MWC 系统由 m 个通道组成. 输入信号 $x(t)$ 同时进入 m 个通道, 在第 i 通道信号 $x(t)$ 被周期为 $T_p (f_p = 1/T_p)$ 的伪随机信号 $p_i(t)$ 混频. 混频后的信号在频域被截止频率为 $1/(2T)$ 的低通滤波器 $h(t)$ 截断, 最后利用采样率为 $f_s = 1/T$ 的低速 ADC 采样, 获取 m 组低速采样值序列 $y_i(n), i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

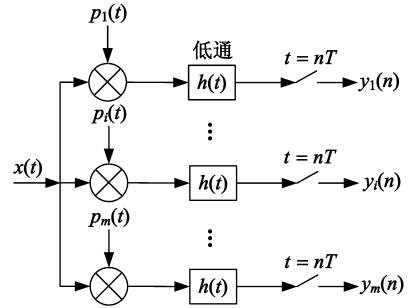


图1 MWC系统框图

由经典傅里叶分析思想, 可以推导出第 i 通道采样值序列 $y_i(n)$ 与原信号 $x(t)$ 的频谱之间有如下关系:

$$Y_i(e^{j2\pi fT}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_i(n) e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=-L_0}^{L_0} c_{i,n} X(f - n f_p) \quad (1)$$

其中 $f \in [-f_s/2, f_s/2]$, $c_{i,n}$ 为 $p_i(t)$ 的傅里叶级数的系数, $L_0 = \lceil (f_{\text{NYQ}} + f_s)/2f_p \rceil - 1$, f_{NYQ} 为信号 $x(t)$ 的奈奎斯特率.

从表达式(1)可以看到, MWC 第 i 通道采样后的信号频谱是原信号频谱 $X(f)$ 以 f_p 为步长的移位、截断、加权和求和的结果. 如果把 $Y_i(e^{j2\pi fT})$ 看作是 m 维列向量 $y(f)$ 的第 i 个分量, $X(f - n f_p)$ 看作是 $L = 2L_0 + 1$ 维列向量 $z(f)$ 的第 n 个分量, 则式(1)可以简洁表达为:

$$y(f) = \Phi z(f), f \in [-f_s/2, f_s/2] \quad (2)$$

其中 $\Phi_{i,j} = c_{i,j-L_0}$ 构成 $m \times L (m < L)$ 维的采样矩阵.

结合式(1)、(2)和上述分析, 可以看出 MWC 采样过程等效于图 2 所示的频谱分割过程, 当采用基本配置 $f_s = f_p \geq B$ 时, 整个频谱 $X(f)$ 相当于被模拟低通滤波器

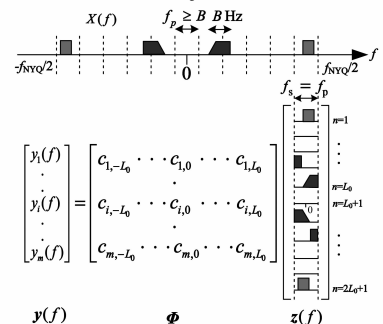


图2 MWC采样原理示意图

分割成了 L 个片段, 伪随机信号 $p_i(t)$ 的频率 f_p 通过设置移位步长决定了最终各频谱片段在 $z(f)$ 中的位置. 因此, 只要求出 $z(f)$, 那么通过频谱搬移方法立即可以重建出原信号的频谱^[10].

2.2 重构问题描述

通过离散时间傅里叶变换的逆运算, 可以推导出式(2)的时域表达形式:

$$\mathbf{Y}(n) = \Phi \mathbf{Z}(n) \quad (3)$$

这里, $\mathbf{Y}(n) = [y_1(n), y_2(n), \dots, y_m(n)]^T$, $\mathbf{Z}(n) = [z_1(n), z_2(n), \dots, z_m(n)]^T$, 其中 $y_i(n)$ 代表从第 i 个通道所获得的时间序列, $z_i(n)$ 表示 $z(f)$ 中与第 i 个未知频谱片段所对应的时间序列. 由于 $m < L$, 矩阵方程式(2)和(3)均是欠定的, 通常情况下无法通过逆运算直接获得唯一解. 对于稀疏宽带信号而言, 未知量 $z(f)$ 和 $\mathbf{Z}(n)$ 仅有少量非零行, 在一定条件^[10]下方程组存在唯一的最稀疏解. 当 $X(f)$ 中各频带位置已知时, 支撑集 $\Omega = \text{supp}(\mathbf{Z}(n)) = \{i | z_i(n) \neq 0\}$ 是确定的, 重构可以通过下式来完成:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_\Omega(n) &= \Phi_\Omega^\dagger \mathbf{Y}(n) \\ \mathbf{Z}_i(n) &= 0, \quad i \notin \Omega \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 $\Phi_\Omega^\dagger = (\Phi_\Omega^H \Phi_\Omega)^{-1} \Phi_\Omega^H$ 代表 Φ_Ω 的左伪逆矩阵.

当然实际中更多关注的是各频带位置未知即支撑集 Ω 未知的情况. 考虑实际的时域采样过程, 一次采样所获得的矩阵 $\mathbf{Y}(n)$ 一定是有限维的, 且 $\mathbf{Z}(n)$ 具有联合稀疏特征, 因此式(3)为 MMV 问题^[10, 13~15], 其求解目标可转化为如下所示最优化问题:

$$\min I(\mathbf{Z}(n)) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{Y}(n) = \Phi \mathbf{Z}(n) \quad (5)$$

式中 $I(\mathbf{Z}(n))$ 表示 $\mathbf{Z}(n)$ 的联合稀疏度.

3 ReMBo 算法分析

在各种 MMV 重构算法中, ReMBo 算法在重构成功率和计算花费等方面优于大多数现有重构算法. 该算法将测量值矩阵 \mathbf{Y} 的各个列向量通过一个随机向量 \mathbf{w} 线性组合成一个列向量 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}\mathbf{w}$, 巧妙地将多测量向量 (MMV) 问题转化为单测量向量 (SMV) 问题. 然后借助于压缩感知重构算法, 采用次最优的方法解这个 SMV 问题 $\bar{\mathbf{y}} = \Phi \mathbf{Z}\mathbf{w} = \Phi \bar{\mathbf{z}}$, 找到一个满足或者近似满足 $\bar{\mathbf{y}} = \Phi \bar{\mathbf{z}}$ 的稀疏解. 检查该解是否充分稀疏以及是否满足由 $\|\bar{\mathbf{y}} - \Phi \bar{\mathbf{z}}\|_2 \leq \epsilon$ 决定的精度要求. 如果不满足这两个条件, 则用一个新的向量 \mathbf{w} 重复执行上述步骤, 直到这两个条件均得到满足或达到重复次数上限为止.

在 ReMBo 算法中“性能提升 (boost)”步骤具有多次循环尝试环节, 与传统算法相比改进了重构性能. 算法中用随机组合实现的“降维 (reduce)”步骤可一定程度地降低算法的计算复杂度. 然而, 另一方面该步骤也潜

在地降低了算法重构性能的上限, 影响算法性能的进一步提高. ReMBo 算法在每个循环步骤中都将多个测量向量降维成了单测量向量, 形成 SMV 问题. 因此与原 MMV 问题相比, 降维后的 SMV 问题中可用于重构的信息也同时减少了. 这一点从 MMV 问题重构性能上限表达式(6)中可以看出:

$$I(\mathbf{Z}) \leq \frac{1}{2}(\sigma(\Phi) + \text{Rank}(\mathbf{Y}) - 1) \quad (6)$$

式中, $I(\mathbf{Z})$ 表示矩阵 \mathbf{Z} 的联合稀疏度, $\sigma(\Phi)$ 为采样矩阵 Φ 的 Kruskal 秩, $\text{Rank}(\mathbf{Y})$ 为矩阵 \mathbf{Y} 的秩. 显然, ReMBo 算法在降维步骤降低了矩阵 \mathbf{Y} 的秩, 使之由大于 1 的整数变成了 1, 根据表达式(6), MMV 问题最大可重构稀疏度减小了一些. 因此, 如果能够增大测量值矩阵的秩, 则重构性能有望获得改进. 如果在降维过程中, 保留更多的列向量, 而不是单独一列, 测量值矩阵的秩 $\text{Rank}(\mathbf{Y})$ 有望得到提高. 受此启发, 本文提出了一个新的算法框架, 该框架通过随机投影, 将测量值矩阵 \mathbf{Y} 转化成包含少量列向量的“窄”矩阵 $\bar{\mathbf{Y}}$, 而不是一个列向量 $\bar{\mathbf{y}}$.

4 随机投影与性能提升算法框架

所提出的方法通过随机投影将测量值矩阵 \mathbf{Y} 压缩成一个包含较少列的矩阵 $\bar{\mathbf{Y}}$. 下面通过定理的形式证明原 MMV 问题的支撑集 $\Omega = \text{supp}(\mathbf{Z})$ 可以通过求解新的 MMV 问题 $\bar{\mathbf{Y}} = \Phi \mathbf{V}$ 来获取, 为了证明该定理首先提出一个引理.

引理 1 设 $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^L$ 是一个已知非零向量. $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^L$ 为从某一连续分布随机获取的向量, 则事件“ \mathbf{a} 在 \mathbf{u} 上的投影不是零”发生的概率为 1.

证明 将 \mathbf{a} 投影到 \mathbf{u} 等价于进行内积运算 $\mathbf{a}^T \mathbf{u}$ (假定 \mathbf{u} 为单位向量). 显然, 方程 $\mathbf{a}^T \mathbf{u} = 0$ 解空间的维数为 $L-1$. 换言之, \mathbf{a} 的零空间 $\{\mathbf{x} | \mathbf{a}^T \mathbf{x} = 0\}$ 在 \mathbf{u} 的可能样本空间 (可以是 \mathbf{R}^L) 中的测度为 0. 根据概率与测度理论^[17], 并结合 \mathbf{u} 的概率分布的连续性, 测度为零的事件发生的概率也为零. 因此可以得到如下结论:

$$P\{\mathbf{a}^T \mathbf{u} \neq 0\} = 1 - P\{\mathbf{u} \in \{\mathbf{x} | \mathbf{a}^T \mathbf{x} = 0\}\} = 1.$$

定理 1 已知矩阵 Φ 满足 $\sigma(\Phi) \geq 2K$, $\hat{\mathbf{Z}}$ 是 $\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{Z}$ 的唯一 K 稀疏解矩阵, $\mathbf{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_J\}$ ($1 \leq J \leq r$) 是一系列长度为 r , 从任意连续概率分布中随机获取的单位向量集. 设 $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\mathbf{W}$, $\bar{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{Z}}\mathbf{W}$. 考虑降维后新的 MMV 问题 $\bar{\mathbf{Y}} = \Phi \mathbf{V}$, 那么对于任意 \mathbf{W} , $\text{supp}(\hat{\mathbf{Z}}) = \text{supp}(\bar{\mathbf{Z}})$ 成立的概率为 1, 并且矩阵 $\bar{\mathbf{Z}}$ 为其唯一的 K 稀疏解.

证明 从投影的角度来说, $\bar{\mathbf{Z}}^{\rightarrow}$ 的每一个元素都可以看作是 $\hat{\mathbf{Z}}^{\rightarrow}$ 在 $w_j, j \in [1, J]$ 上的随机投影. 因此根据引理 1, $\hat{\mathbf{Z}}^{\rightarrow}, i \in \text{supp}(\hat{\mathbf{Z}})$ 的各个行向量以概率 1 映射到了 $\bar{\mathbf{Z}}^{\rightarrow}$ 的非零行, 而且很显然, 在投影前后零行不发生改变, 因此未

知矩阵的支撑集在投影前后保持不变的概率为 1. 如上述分析, 既然 $\bar{\mathbf{Z}}$ 也是 K 稀疏的且满足 $\bar{\mathbf{Y}} = \Phi \bar{\mathbf{Z}}$, 因此, 结合条件 $\sigma(\Phi) \geq 2K$, $\bar{\mathbf{Z}}$ 是 $\bar{\mathbf{Y}} = \Phi \bar{\mathbf{V}}$ 的唯一 K 稀疏解.

定理 1 为新重构框架提供了理论依据, 该框架在下文简称为 RPMB (Randomly Project MMV and Boost). RPMB 中, 测量值矩阵 \mathbf{Y} 首先被变换成由少量列向量所组成的低维矩阵 $\bar{\mathbf{Y}}$, 该变换将矩阵 \mathbf{Y} 的每一行投影到由 \mathbf{W} 的列向量所张成的空间中. 然后通过求解新 MMV 问题寻求原 MMV 问题的支撑集. 最后, 由伪逆运算求得最终解.

此外, 为了提高重构成功率, 在求解过程中本算法框架重复上述投影过程以增加尝试次数. 该策略主要基于下面的实验现象: 随机取两个具有相同支撑的矩阵 \mathbf{Z}_1 和 \mathbf{Z}_2 , 采用贪婪算法或凸松弛算法经常只能从测量值矩阵 $\mathbf{Y}_1 = \Phi \mathbf{Z}_1$ 和 $\mathbf{Y}_2 = \Phi \mathbf{Z}_2$ 中恢复出其中之一, 而无法恢复出另一个, 尤其是当稀疏度 K 接近 Φ 的 Kruskal 秩的一半时, 该现象出现的频率会更高. 该现象表明, MMV 问题的重构性能不仅取决于具体支撑情况, 而且与未知矩阵 \mathbf{Z} 的支撑集所对应的具体元素也有一定关系. 因此, 本算法重复这一过程直到稀疏解被识别出来. 算法 1 给出了 RPMB 算法框架的伪代码.

算法 1 RPMB 算法框架伪代码

输入: 采样矩阵 Φ , 测量值矩阵 \mathbf{Y} , 联合稀疏度 K , 重构误差 ϵ , 最大迭代次数 MaxIters

输出: 稀疏解 $\hat{\mathbf{Z}}$ 和支撑集 $\hat{\Omega}$

步骤 1 初始化. 初始化迭代计数器 $\text{Iter} = 1$

步骤 2 随机投影降维.

$$\mathbf{W} = \text{random}(r, J)$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\mathbf{W}$$

步骤 3 求解. 解新的 MMV 问题: $\bar{\mathbf{Y}} = \Phi \bar{\mathbf{V}}$, 获得一个解 $\bar{\mathbf{Z}}$ 和支撑集 $\bar{\Omega} = \text{supp}(\bar{\mathbf{Z}})$

步骤 4 检验与性能提升.

如果集合 $\bar{\Omega}$ 的势 $|\bar{\Omega}| \leq K$ 并且 $\|\bar{\mathbf{Y}} - \Phi \bar{\mathbf{Z}}\|_F \leq \epsilon$, 则执行步骤 5;

否则, $\text{Iter} = \text{Iter} + 1$ 并重复步骤 2、3、4 直到 $\text{Iter} > \text{MaxIters}$

步骤 5 输出. 返回支撑集 $\hat{\Omega} = \bar{\Omega}$ 并由下式伪逆运算求出最终解 $\hat{\mathbf{Z}}$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{Z}}^{\hat{\Omega}^c} = 0, & i \notin \hat{\Omega} \\ \hat{\mathbf{Z}}^{\hat{\Omega}} = \Phi_{\cdot, \hat{\Omega}}^{\dagger} \mathbf{Y} \end{cases} \quad (7)$$

在上述步骤中, 函数 $\text{random}(r, J)$ 表示由连续型概率分布生成 $r \times J$ ($1 \leq J \leq r$) 维的随机矩阵, 矩阵的每个列均为单位向量. $\|\mathbf{Z}\|_F$ 表示矩阵 \mathbf{Z} 的 Frobenius 范数. RPMB 采用了与 ReMBo 中“降维与性能提升”相似的思想, 但不同的是 RPMB 在降维过程中不是仅保留一列测量向量, 而是通过随机投影思想保留了 J ($1 \leq J \leq r$) 个测量向量. 在步骤 2 中如果随机矩阵 \mathbf{W} 仅为一列的向量, 则 RPMB 便退化成了 ReMBo 算法. 从这个角度可以

看出, RPMB 是 ReMBo 算法的推广. 算法中的随机矩阵 \mathbf{W} 具有两个功能: 一是在一定程度上, 降低 MMV 问题的维数; 二是将原始的 MMV 问题转化成一个新的 MMV 问题以便于执行性能提升策略.

与 ReMBo 相比, RPMB 增加了测量向量数目, 从重构信息的角度来说, MMV 问题增加了可用于重构的信息的丰富程度, 尤其是增加了测量向量间的联合信息. 正如文献[15]中所报道的那样, 与基于 SMV 的重构方法相比, 随着测量向量数的增加, 联合重构方法可以在很大程度上改进重构性能. 因此使用 RPMB 框架增加尝试次数, 同时充分利用多个测量向量间的公共信息, 可以改进算法的重构性能.

5 MMV 求解器

RPMB 的一个重要优点是其在投影过程中保留了多个列向量, 可以充分利用在多个测量向量之间的联合信息(联合稀疏结构), 该优点在基于 SMV 的算法框架中是不具备的. 需要指出的是, RPMB 所侧重的是一种加速和性能提升机制, 而其本身无法完成具体重构任务. 在算法的步骤 3 中需要一个求解器来执行每个尝试循环的具体求解工作. 尽管步骤 3 并不要求特定的求解器, 但是如果所使用的求解器具有随测量向量数增加性能提高的特点显然对发挥 RPMB 框架的优势是有利的. 为此, 本节提出了一个用于 RPMB 框架的高性能求解器算法, 该算法带有一个高性能的支撑集识别策略. 所提出的算法在下文中简记为 MOMPMMV (Modified OMPMMV). 求解器首先利用现有的 OMPMMV 算法^[13, 15] 重构出一个初步解, 然后执行一个两步的支撑识别过程. 在初步重构后, 首先计算初步解矩阵中每个行向量的 ℓ_2 范数, 并且找出 m 个最大范数, 将其所对应的行的序号作为粗略的支撑集. 然后利用初步重构获得的原子集(字典)通过伪逆运算重新计算支撑集. 算法 2 给出了具体求解器算法.

在算法 2 中, 函数 $\max(\mathbf{v}, m)$ 的值是返回向量 \mathbf{v} 中 m 个最大值所对应的序号. 对于 $\Omega \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\Phi_{\cdot, \Omega}^{\dagger}$, $\Phi_{\cdot, \Omega}$ 代表以 $i \in \Omega$ 为行或列索引的 Φ 的子矩阵.

实验中注意到, 在很多情况下, 仅仅因为少量的支撑元素识别错误而造成初步重构的结果是失败的. 因此, 步骤 1 ~ 步骤 3 通过寻找更多的潜在的支撑元素—— m ($m \geq K$) 个最大 ℓ_2 范数所对应的序号——可以改进容错能力. 此外, 由于步骤 2 中各个行的 ℓ_2 范数反映的是所有列的联合贡献, 因此与只有一列的情形相比, 采用 ℓ_2 范数后所识别出的支撑元素的可信度得到了提高, 算法的整个过程相当于充分利用了解矩阵中各个列向量之间的公共信息. 一般来说, 只要这 m 个序号包含 K 个真实的支撑元素, 步骤 4、5 通过最优的伪逆

运算便能够得到正确的支撑集.

算法 2 MOMPMMV 求解器算法

输入: 采样矩阵 Φ , 测量值矩阵 Y , 联合稀疏度 K , 门限 ϵ

输出: 稀疏解 \hat{Z} 和支撑集 $\hat{\Omega}$

步骤 1 利用 MOMPMMV 重构算法求解优化问题: $\min l(Z) \text{ s.t. } Y = \Phi Z$, 并获得一个初步解 \hat{Z}

步骤 2 计算 \hat{Z} 的每个行向量的 ℓ_2 范数:

$$\text{RowNorm}(i) = \|\hat{Z}^{i*}\|_2$$

步骤 3 获得初步支撑集:

$$\hat{\Omega} = \max(\text{RowNorm}, m)$$

步骤 4 计算在初步字典 $\Phi_{\hat{\Omega}}$ 下的最优解:

$$\hat{Z}^{\hat{\Omega}*} = \Phi_{\hat{\Omega}}^+ Y$$

步骤 5 通过 ℓ_2 范数和预设门限 ϵ 计算最终支撑集 $\hat{\Omega}$:

$$\hat{\Omega} := \{i \in \hat{\Omega} \mid \|\hat{Z}^{i*}\|_2 \geq \epsilon\}$$

步骤 6 返回支撑集 $\hat{\Omega}$ 和由式(7)所决定的解矩阵 \hat{Z}

6 实验结果与讨论

本节实验的目的是验证 RPMB-MOMPMMV 作为 MWC 亚奈奎斯特采样重构算法的优势. 首先考察在相同条件下, 与 ReMBo 算法相比, RPMB 算法的重构成功率情况, 同时比较在相同条件下两种算法高概率重构所需的最小硬件通道数以及能够重构的信号的最大频带数, 最后对两种算法的重构时间进行比较和分析.

实验中, 两种算法的最大迭代次数和重构误差均设置为 $\text{MaxIters} = 20$, $\epsilon = 10^{-3}$, 具体稀疏宽带信号由下式生成^[10]:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N/2} \sqrt{E_n B_n} \text{sinc}(B_n(t - \tau_n)) \cos(2\pi f_n(t - \tau_n))$$

其中, 参数 E_n, B_n, f_n, τ_n 分别代表第 n 个频带的能量系数、带宽、载波频率和延迟时间, N 为频带数量. 各频带的能量系数设置为 $E_n = 1$ 带宽 $B_n = 50\text{MHz}$, 信号奈奎斯特率 $f_{\text{NYQ}} = 10\text{GHz}$. MWC 具体采样参数按照采样原理设置如下: $f_s = f_p = f_{\text{NYQ}}/195 = 51.28\text{MHz}$; $L_0 = 97$, $L = 2L_0 + 1 = 195$; $m = 50$. 每个实验重复以下过程 500 次, 将成功次数的百分率作为成功概率:

(1) 按相同概率随机产生由 (± 1) 组成的符号波形 $p_i(t)$;

(2) 在区间 $[-f_{\text{NYQ}}/2, f_{\text{NYQ}}/2]$ 内按均匀分布随机产生各个频带的载波频率 f_n ;

(3) 在有效观测时间内随机确定延时 τ_n ;

(4) 用 RPMB-MOMPMMV 算法和 ReMBo-OMP 算法来估计支撑集, 当估计支撑集与实际支撑集相同即 $\hat{\Omega} = \Omega$ 时则称重构成功, 如果 $\hat{\Omega} \supset \Omega$, 同时 $\Phi_{\hat{\Omega}}$ 是满秩的, 也作为成功的标志^[10].

首先, 考察在相同条件下 RPMB 与 ReMBo 用于

MWC 重构时成功率情况.

图 3 给出了信号频带数分别为 $N = 6$ 和 $N = 8$ 时, 两种算法的重构成功率随通道数 m 的变化情况, 图中分别给出了降维程度 $J = 1, 2, 5, 10$ 时所对应的曲线, 易知当 $J = 1$ 时 RPMB 退化成 ReMBo. 从图 3 (a) 可以看出, 当频带数为 6, 通道数小于 33 时, RPMB 在各种降维程度 ($J = 2, 5, 10$) 下的重构成功率均比 ReMBo 高. 如当 $m = 18$, $J = 2, 5, 10$ 时 RPMB-MOMPMMV 算法分别比 ReMBo-OMP 的重构成功率高 45.4%, 52.6%, 63.4%; 从图 3 (b) 可以看出, 在频带数为 8 时也有类似的特点, 当通道数小于 37 时, RPMB 在各种降维程度 ($J = 2, 5, 10$) 下的重构率均比 ReMBo 高. 如当 $m = 25$, $J = 2, 5, 10$ 时 RPMB 算法分别比 ReMBo 算法的重构概率高 39.8%, 51.8%, 54.8%. 此外, 由图 3 可见, 在通道数较低时, 随着 J 的增加, 总体上 RPMB 算法的重构成功率也随之增加, 这一点表明随着保留的测量向量数 J 的增加, 正如 3 节所分析的那样, 用于重构的信息增多, RPMB 在充分利用联合信息的前提下有效提高了算法的重构性能. 表明随机投影过程保留多个列向量具有较大优势.

从图 3 还可以看出, RPMB 高概率重构所需的硬件通道数 m 要比 ReMBo 算法小, 如当 $N = 6$ 时若需重构概率不低于 99%, ReMBo 算法至少需要 $m = 33$, 而 RPMB 当 $J = 2, 5, 10$ 时分别只需 27, 25, 22 个硬件通道. 由此可见, 若采用 RPMB 作为重构算法可以在一定程度上节省硬件开销.

图 4 给出了当通道数固定为 $m = 30$ 时, 两种算法

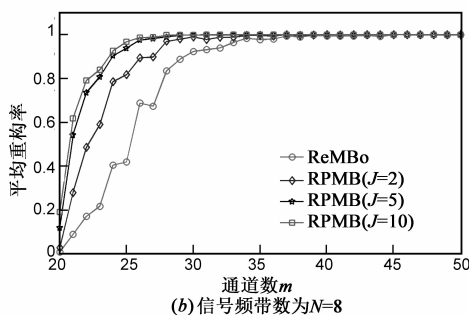
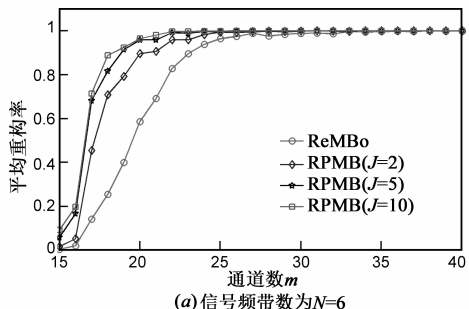


图3 RPMB和ReMBo算法重构成功率随通道数的变化

的重构成功率随信号频带数 N 的变化情况. 如图所示, 随着频带数的增加, 两种算法的重构概率均有下降的趋势, 这是因为通常信号越稀疏越容易获得高概率重构, 而频带数直接与未知矩阵的稀疏度相关, 因此随着 N 的增大, 算法的重构概率必然有降低的趋势. 可重构的信号的频带数也是算法重构能力的体现. 如图 4 所示, 在通道数不变的前提下, 当 $N \geq 4$ 时, 随着频带数的增加 ReMBo 算法的重构概率便开始下降, 而 RPMB-MOMPMMV ($J = 10$) 在信号频带数 $N = 8$ 时重构概率仍高达 99.2%, 可见 RPMB 算法有效提高了可重构的信号的最大频带数量, 提高了重构能力.

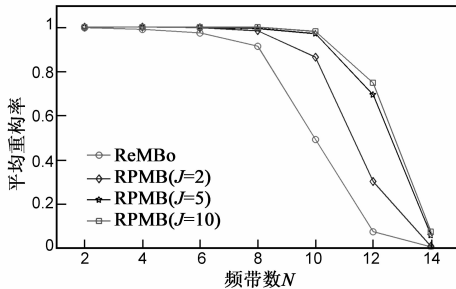


图4 当通道数 $m=30$ 时 RPMB 和 ReMBo 算法重构成功率随信号频带数的变化

综上所述, RPMB 算法通过保留更多的测量向量, 并充分利用测量向量间的联合稀疏性有效提高了算法的重构性能, 那么与 ReMBo 相比 RPMB 的运算时间如何呢?

为了比较两种算法的平均运算时间, 表 1 统计了两种算法在通道数 $m = 30$ 时的重构时间. 实验中信号频带数 N 在区间 $[4, 12]$ 内以 2 为步长变化, 对每个 N 值, 按照与前述实验完全相同的方法设置信号参数, 并执行 500 次步骤 1~4, 分别统计并计算 $J = \{1, 2, 5, 10\}$ 时的平均重构时间. 实验所使用的软件为 Matlab2011b, 所采用的计算机主要配置如下: CPU 为 i7-2640M, 双核/2.8GHz, 内存为 4G. 如表 1 所示, RPMB 算法的重构时间并没有随着 J 的增加而大幅度增加. 相反, 当频带数较大 ($N \geq 6$) 时, 与 ReMBo 相比, RPMB ($J = 2$)、RPMB ($J = 5$)、RPMB ($J = 10$) 算法的重构时间均比 ReMBo 算法有所减小. RPMB 保留了多个测量向量而其运算时间反而下降, 原因在于算法的平均尝试次数有所降低, 进一步分析可知, RPMB 利用保留的多个测量向量间的联合稀疏性提高单次尝试成功的概率, 减少了特定重构问题的平均尝试次数, 因此与 ReMBo 相比, RPMB 可降低重构时间花费. 当信号频带数较少 ($N \leq 4$) 时, ReMBo 算法也可以在较少的尝试次数内完成重构, 此时, 与之相比 RPMB 所节省的尝试次数不足以抵消因多个列向量参与运算而引入的额外时间开销, 因此此时的平均重构时间会略有增加. 如当 $N = 2$ 时, 随着 J 的增加算法的

重构时间呈递增规律变化. 尽管如此, 重构时间的增加幅度很小, 与保留的测量向量数 J 远远未达到成倍增长关系, 因此即使在信号的频带数较低时, 考虑到在重构性能方面的优势, 本文所提出的 RPMB 方法仍然是不错的选择.

表 1 在不同降维程度下 RPMB 与 ReMBo 算法重构时间的比较

频带数 N	不同降维程度下的平均重构时间/s			
	ReMBo [RPMB ($J = 1$)]	RPMB ($J = 2$)	RPMB ($J = 5$)	RPMB ($J = 10$)
12	1.4119	1.0652	0.6915	0.6065
10	0.7739	0.3607	0.2157	0.2077
8	0.2414	0.1609	0.1802	0.1586
6	0.2937	0.1656	0.1856	0.1507
4	0.1288	0.1268	0.1494	0.1679
2	0.1073	0.1268	0.1453	0.1548

7 结论

基于随机投影思想, 提出了一种 MWC 亚奈奎斯特采样高性能重构算法, 该算法由一个灵活的重构算法框架 (称为 RPMB) 和一个适用于该框架的高性能求解器两部分组成. RPMB 框架将 MMV 随机地投影到一个低维空间上, 并重复这个过程进行尝试性求解, 提高了算法的重构性能. RPMB 为著名的 ReMBo 算法提供了一个推广的算法框架, ReMBo 可以看作是 RPMB 的一个特例. 此外, 本文还提出了一个可以嵌入 RPMB 框架的高性能求解器算法. 实验结果表明, 与 ReMBo 算法相比, 所提出的算法可以充分利用多个测量向量间的联合稀疏性, 有效提高了算法的重构成功率; 当信号的频带数相同时, 所提出的算法为达到精确重构所需硬件通道数更小; 在相同的硬件通道数前提下, 可重构的信号频带数更高; 而且与 ReMBo 相比运行时间并没有大幅度增加, 当信号频带数较大时, 运算时间比 ReMBo 算法小.

参考文献

- [1] Bai L, Roy S. Compressive spectrum sensing using a bandpass sampling architecture[J]. IEEE J Emerg Sel Top Circuits Syst, 2012, 2(3): 433–442.
- [2] Sun H, Chiu W, Jiang J, et al. Wideband spectrum sensing with sub-Nyquist sampling in cognitive radios[J]. IEEE Trans Signal Process, 2012, 60(11): 6068–6073.
- [3] Fu W, Yang X. Communication signal blind reconnaissance technology based on probability density estimation blind sources separation[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition), 2006, 34(10): 24–27.
- [4] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070–1081.

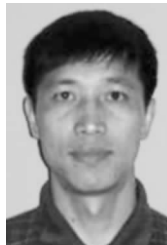
- Shi Guang-ming, Liu Dan-hua, Gao Da-hua, et al. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070 – 1081. (in Chinese)
- [5] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans Inf Theory, 2006, 52(4): 1289 – 1306.
- [6] Baraniuk R. More is less: Signal processing and the data deluge [J]. Science, 2011, 331(11): 717 – 719.
- [7] 付宁, 曹离然, 彭喜元. 基于子空间的块稀疏信号压缩感知重构算法[J]. 电子学报, 2011, 39(10): 2338 – 2342.
Fu Ning, Cao Li-ran, Peng Xi-yuan. Compressed sensing of block-sparse signals recovery based on subspace[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(10): 2338 – 2342. (in Chinese)
- [8] Kirolos S, Laska J, Wakin M. Analog-to-information conversion via random demodulation[A]. Proceedings of the IEEE Dallas Circuits and Systems Workshop (DCAS) [C]. Dallas, Texas: IEEE, 2006. 71 – 74.
- [9] Laska J, Kirolos S. Random sampling for analog-to-Information conversion of wideband signals[A]. Proceedings of the IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software[C] Richardson, TX: IEEE, 2006. 119 – 122.
- [10] Mishali M, Eldar Y C. From theory to practice: sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals[J]. IEEE J Sel Top Sign Proces, 2010, 4(2): 375 – 39.
- [11] Mishali M, Eldar Y C, Dounaevsky O, et al. Xampling: Analog to digital at sub-Nyquist rates[J]. IET Circuits Devices Syst, 2011, 5(1): 8 – 20.
- [12] Lexa M A, Davies M E, Thompson J S. Reconciling compressive sampling systems for spectrally sparse continuous-time signals[J]. IEEE Trans Signal Process, 2012, 60(1): 155 – 171.
- [13] Chen J, Huo X M. Theoretical results on sparse representations of multiple-measurement vectors[J]. IEEE Trans Signal Process, 2006, 54(12): 4634 – 4643.
- [14] Majumdar A, Ward R K, Aboulnasr T. Algorithms to approximately solve NP hard row-sparse MMV recovery problem: Application to compressive color imaging[J]. IEEE J Emerg Sel Top Circuits Syst, 2012, 2(3): 362 – 369.
- [15] Cotter F S, Rao D B, Engan K, et al. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors[J]. IEEE Trans Signal Process, 2005, 53(7): 2477 – 2488.
- [16] Mishali M, Eldar Y C. Reduce and boost: recovering arbitrary sets of jointly sparse vectors[J]. IEEE Trans Signal Process, 2008, 56(10): 4692 – 4702.
- [17] Billingsley P. Probability and Measure [M]. 3rd ed. New York: Wiley, 1995. 158 – 198.

作者简介



盖建新 男, 博士生, 哈尔滨理工大学讲师, 主要研究方向为亚奈奎斯特采样、压缩感知、宽带频谱感知等。

E-mail: gjx800608@126.com



付平 男, 博士, 哈尔滨工业大学教授、博士生导师, 主要研究方向为压缩感知, 图像处理, 自动测试技术等。

E-mail: fupinghit@126.com